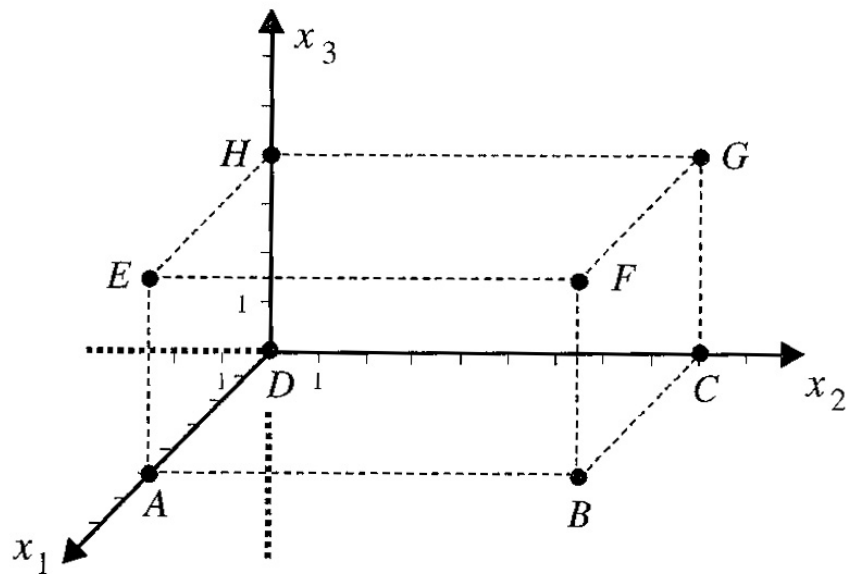


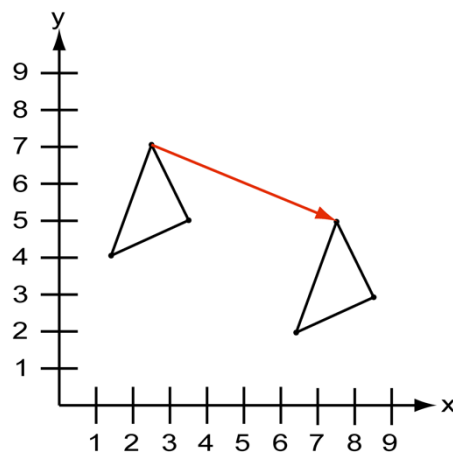
Der Vektorbegriff



Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Quaders.

$A(5/0/0)$, $B(5/9/0)$, $C(0/9/0)$, $D(0/0/0)$, $E(5/0/4)$, $F(5/9/4)$, $G(0/9/4)$, $H(0/0/4)$

In der folgenden Abbildung ist eine Verschiebung (Translation) dargestellt. Dabei wird durch einen Verschiebungspfeil (Vektor) jedem Punkt P der Ebene oder Raumes genau ein Bildpunkt P' zugeordnet.



Die Menge aller Pfeile einer Translation wird als Verschiebungsvektor oder kurz Vektor bezeichnet.

Länge eines Vektors:

Die Maßzahl für die Länge eines Vektors $\vec{a}$ wird mit $|\vec{a}|$ (Betrag von $\vec{a}$) bezeichnet.

In der Ebene: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ Im Raum: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Der Vektor mit der Länge Null heißt Nullvektor.

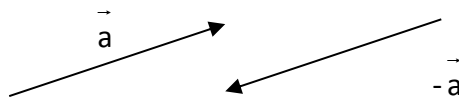
Im Raum gilt: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Weitere wichtige Vektoren:

1) Gegenvektor:

Ein zu einem Vektor $\vec{a}$ entgegengesetzt orientierter Vektor gleicher Länge heißt Gegenvektor oder inverser Vektor zu $\vec{a}$.

Bezeichnung: $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$



2) Einheitsvektor:

Ein Vektor der Länge 1 heißt Einheitsvektor oder normierter Vektor.

Bezeichnung: $\vec{e}_0$

3) Verbindungsvektor zweier Punkte

$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$ „Spitze minus Fuß“

4) Ortsvektor

Die Translation, die den Ursprung 0 in den Punkt P abbildet, heißt Ortsvektor von P.



Bezeichnung: $\overrightarrow{OP}$ oder $\vec{p}$ $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ p_2 - 0 \\ p_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

Aufgaben:

1.0 Bestimmen Sie zu P den Bildpunkt Q bei Verschiebung um den Vektor $\vec{a}$. ☐

1.1 $P(0/-2) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.2 $P(-1/-1/0) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.0 Bestimmen Sie den Vektor $\vec{a}$, der den Punkt P in den Punkt Q verschiebt. ☐

2.1 $P(1/-2) \quad Q(-1/-2)$

2.2 $P(1/-1/2) \quad Q(-2/-2/5)$

3.0 Bestimmen Sie zum Punkt Q und zum Vektor $\vec{a}$ den Urbildpunkt P. ☐

3.1 $Q(0/-1) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3.2 $Q(-3/1/-1) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.0 Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass Q der Bildpunkt von P bei der Translation $\vec{a}$ ist. ☐

4.1 $P(a/2/c) \quad Q(1/b/3) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} c \\ -2 \\ c \end{pmatrix}$

4.2 $P(a/2b/3) \quad Q(2b/1/c) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2c \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungen:

1.1 Q(3/2) 1.2 Q(0/1/1)

$$2.1 \vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2.2 \vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.1 P(3/-3) 3.2 P(-3/1/-2)

4.1

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ b-2 \\ 3-c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-a \\ b-2 \\ 3-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -2 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{(I)} \quad 1-a=c$$

$$\text{(II)} \quad b-2=-2 \Rightarrow b=0$$

$$\text{(III)} \quad 3-c=c \Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1-a=\frac{3}{2} \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

4.2

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2b \\ 1 \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 2b \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b-a \\ 1-2b \\ c-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2b-a \\ 1-2b \\ c-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{(I)} \quad 2b-a=2c$$

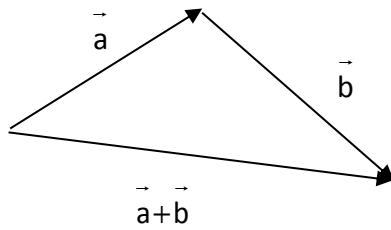
$$\text{(II)} \quad 1-2b=2a \Rightarrow 2b=1-2a$$

$$\text{(III)} \quad c-3=1 \Rightarrow c=4$$

$$\Rightarrow 1-2a-a=2c \Rightarrow 1-3a=8 \Rightarrow a=-\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 2b=1-2 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) \Rightarrow 2b=\frac{17}{3} \Rightarrow b=\frac{17}{6}$$

Addition von Vektoren:



$$\text{Im } \mathbb{R}^2: \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im } \mathbb{R}^3: \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

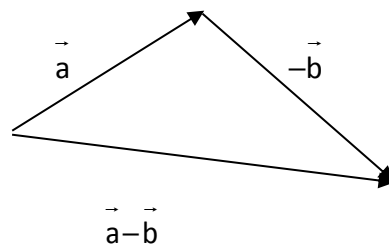
Eigenschaften der Vektoraddition:

Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ der Ebene oder des Raumes gilt:

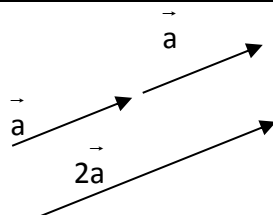
- a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Kommutativgesetz
- b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ Assoziativgesetz
- c) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (Neutrales Element)
- d) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (Inverses Element)

Subtraktion von Vektoren:

Die Differenz zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird gebildet, indem man zu $\vec{a}$ den Gegenvektor von $\vec{b}$ addiert. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (S-Multiplikation):



$$\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$$

Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem man jede Koordinate mit dieser Zahl multipliziert.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \end{pmatrix} \quad \alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Folgerung:

Der Vektor $\alpha \cdot \vec{a}$ ist $|\alpha|$ -mal so lang wie der Vektor $\vec{a}$.

$\alpha > 0$: $\vec{a}$ und $\alpha \cdot \vec{a}$ sind gleichgerichtet

$\alpha < 0$: $\vec{a}$ und $\alpha \cdot \vec{a}$ sind entgegengesetzt gerichtet

Eigenschaften der S-Multiplikation:

Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ der Ebene oder des Raumes und reelle Zahlen α, β gilt:

a) $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ V(ektorielles) Distributivgesetz

b) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$ S(kalares) Distributivgesetz

c) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$ Assoziativgesetz

d) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \quad (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

e) $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Folgerung:

Durch die Multiplikation mit einer reellen Zahl kann jeder Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ zu einem

Einheitsvektor normiert werden: $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

Anwendungen zum Rechnen mit Vektoren

(1) Gleichheit zweier Vektoren:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann gleich, wenn ihre entsprechenden Komponenten übereinstimmen.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} a_1 &= b_1 \\ a_2 &= b_2 \\ a_3 &= b_3 \end{aligned}$$

(2) Parallelität von Vektoren:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann parallel, wenn gilt:

$$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \begin{aligned} b_1 &= \alpha \cdot a_1 \\ b_2 &= \alpha \cdot a_2 \\ b_3 &= \alpha \cdot a_3 \end{aligned}$$

Aufgaben:

1.0 Gegeben sind die Punkte A(2/1/3), B(-1/3/-2) und C(0/1/-1).
Berechnen Sie die Vektoren. ☐

1.1 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

1.2 $3 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + 2 \cdot \overrightarrow{CA}$

2.0 Prüfen Sie, ob die angegebenen Vektoren parallel sind. ☐

2.1 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

2.2 $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösungen:

1.1

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} & \vec{AC} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \\
 \vec{AB} + \vec{AC} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} & \vec{CB} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} & \vec{CA} &= -\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow 3 \cdot \vec{AB} - \vec{CB} - 2 \cdot \vec{CA} &= 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2.1

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{(I)} \quad 2 = \alpha \cdot 4 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{(II)} \quad 3 = \alpha \cdot 6 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel

2.2

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{(I)} \quad -8 = \alpha \cdot 4 \Rightarrow \alpha = -2$$

$$\text{(II)} \quad -6 = \alpha \cdot (-3) \Rightarrow \alpha = 2$$

$$\text{(III)} \quad 4 = \alpha \cdot (-2) \Rightarrow \alpha = -2$$

$\Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht parallel